

# Rendering ed illuminazione

---

*Dove si introduce un metodo per ottenere una immagine a partire da una descrizione degli oggetti tridimensionali e si presenta la legge fondamentale che governa l'illuminazione.*

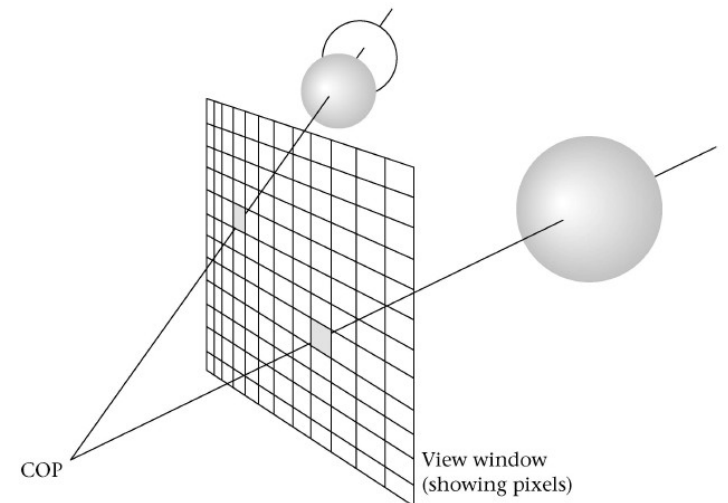
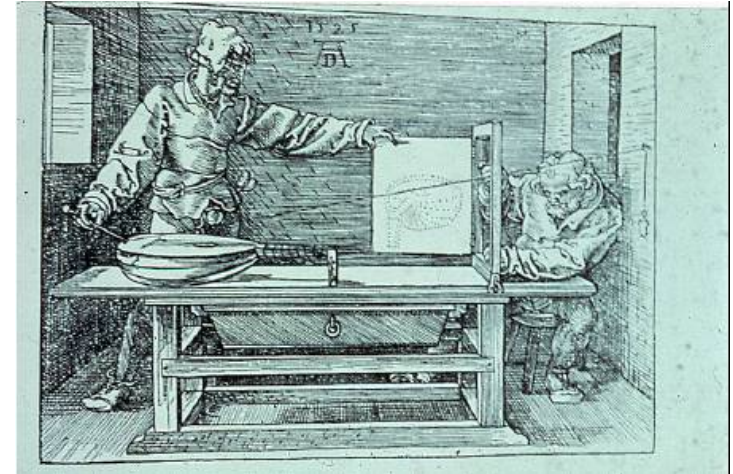
- **Introduzione al rendering**
- **Modello fisico dell'illuminazione**

# Introduzione al rendering

- **Modeling** (modellazione) e **Rendering** sono i due filoni principali della grafica. Fin'ora abbiamo parlato di modellazione.
- Il termine **rendering** indica la serie di algoritmi, geometrici e non, a cui si sottopone una data descrizione di una serie di oggetti per ottenere una immagine
- Le descrizioni (abbiamo visto) possono essere:
  - maglie (*mesh*) poligonali
  - superfici parametriche
  - CSG
  - volumetriche
- Il modeling di una scena sintetica è un problema relativamente facile, per quanto laborioso.
- Il problema del rendering (e della illuminazione) è il problema centrale della Grafica al calcolatore, da un punto di vista pratico e concettuale.

## Il metodo del pittore: ray casting

- Come avviene la creazione di immagini 2D del mondo 3D?
- Si fissa un punto di vista o COP (occhio del pittore) ed un rettangolo (tela) su cui si formerà l'immagine (il piano contenente il rettangolo è chiamato per questo **piano immagine**).
- Il rettangolo stesso prende il nome di **finestra di vista** (*view window*).
- La tela è divisa in celle (**pixel**), ciascuna delle quali assumerà un colore.
- Si traccia un raggio (**raggio ottico**) attraverso ciascuna cella e la si dipinge con il colore che si vede lungo il raggio.

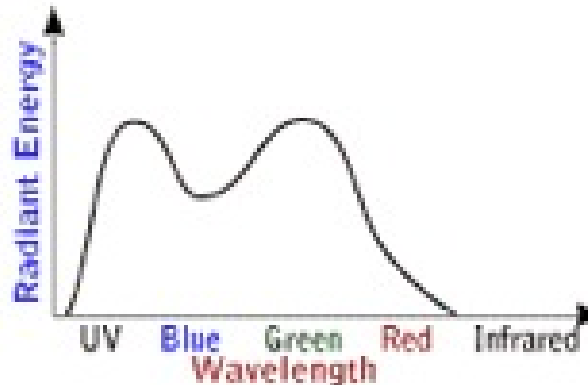


©Slater et al.

- La distanza del piano immagine dal COP e le dimensioni della finestra di vista determinano l'**angolo di vista**.
- I raggi ottici riempiono una piramide semi-infinita con il vertice nel COP e gli spigoli che passano attraverso i vertici della finestra di vista.
- Questo processo prende il nome di **ray casting** e ricalca il modo in cui Aristotele pensava funzionasse la visione umana.
- Il ray casting funziona con tutte le descrizioni dei modelli già viste.
- La geometria del processo è semplice ed intuitiva (ma anche inefficiente, a causa del calcolo delle intersezioni).
- Il cuore del processo è il calcolo del colore lungo i raggi.
- Bisogna studiare un **modello di illuminazione**, che esprime i fattori che determinano il colore di una superficie in un determinato punto.

# Modello fisico dell'illuminazione

- La radiazione luminosa è caratterizzata
  - da una certa distribuzione spettrale, che ne determina il **colore**
  - dalla energia che trasporta, che ne determina ciò che viene percepito come **intensità** o **luminosità** (per ora usiamo in modo informale questi termini).



- Si chiama **fotometria** la misura dell'energia trasportata dalle onde elettromagnetiche della gamma ottica (spettro visibile).
- In senso più stretto, la fotometria si occupa dell'azione della luce visibile sull'occhio umano
- La **radiometria** invece si occupa di radiazioni estese sull'intero intervallo delle possibili lunghezze d'onda e non considera gli effetti sull'osservatore.

- Essendo interessati ad un modello oggettivo, definiremo le **grandezza radiometriche** (tra parentesi le corrispondenti denominazioni fotometriche).
- Assumendo che non ci sia interazione tra le diverse lunghezze d'onda, si può misurare l'energia indipendentemente per un certo numero di lunghezze d'onda campione che servono a rappresentarel'intera distribuzione spettrale.
- Di solito se ne usano 3, per motivi legati al sistema visivo umano, corrispondenti al rosso, verde e blu (RGB).
- Tutte le grandezze che definiremo sono implicitamente **spettrali**, ovvero riferite ad una singola lunghezza d'onda.

# Radiometria

- Il **flusso radiante** (flusso luminoso)  $\Phi$  è la velocità alla quale l'energia luminosa viene emessa – o assorbita – da una superficie, ha le dimensioni di una potenza (energia per unità di tempo) e si misura in Watt [W].

## Irradianza e radiosità

- Si dice **irradianza** (illuminanza)  $E(x)$  il rapporto tra il flusso **ricevuto** da un elemento infinitesimo di superficie in  $x$  e la sua area  $dx$ :

$$E(x) = \frac{d\Phi}{dx}$$

- Si dice **radiosità** (luminosità) o *radiosity*  $B(x)$  il rapporto tra il flusso **emesso** da un elemento infinitesimo di superficie in  $x$  e la sua area  $dx$ :

$$B(x) = \frac{d\Phi}{dx}$$

- Irradianza e radiosità sono la stessa grandezza (una densità superficiale di flusso) e si misurano in  $[W/m^2]$ . La differenza è che l'irradianza è energia ricevuta, la radiosità è energia emessa.
- In entrambe i casi, l'energia ricevuta/emessa si considera da/verso tutte le direzioni.

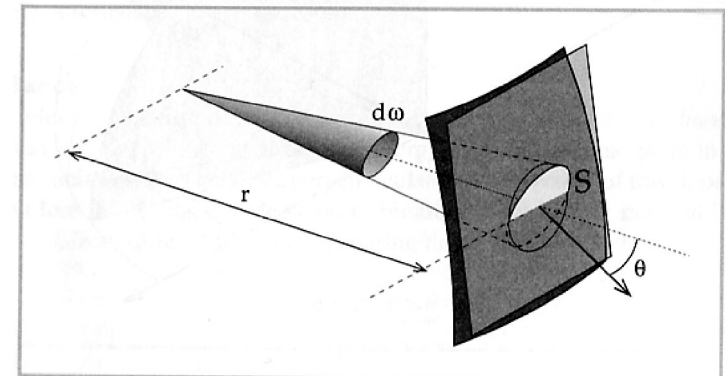
## Intensità radiante

- **L'intensità radiante** (luminosa) è il flusso radiante (luminoso) emesso in un angolo solido infinitesimo  $d\omega$  lungo una particolare direzione  $\omega$ :

$$I(\omega) = \frac{d\Phi}{d\omega}$$

- Si usa soprattutto per descrivere sorgenti luminose puntiformi.
- L'angolo solido sotteso da un oggetto rispetto un punto P è pari all'area della proiezione dell'oggetto su una sfera unitaria centrata in P.

- L'angolo solido sotteso da un elemento infinitesimo di superficie  $dx$  centrato in  $x$  ed orientato con normale  $\mathbf{n}$ , rispetto ad un punto  $y$  distante  $r$  vale:  $d\omega = \frac{dx \cos \theta}{r^2}$  dove  $\theta$  è l'angolo formato dalla normale  $\mathbf{n}$  con la congiungente  $y$  ed  $x$ .



- il termine  $dx \cos \theta$  rappresenta l'area proiettata di  $dx$  lungo la congiungente  $y$  ed  $x$ .
- Se poniamo in  $y$  una sorgente di luce puntiforme con intensità radiante  $I$ , allora la irradianza nel punto  $x$  vale:

$$E(x) = \frac{d\Phi}{dx} = \frac{I \cos \theta}{r^2}$$

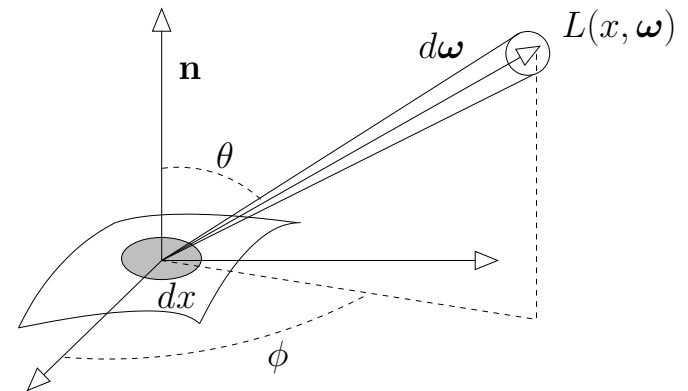


## Radianza

- La **radianza** (luminanza)  $L(x, \omega)$  nel punto  $x$  in una direzione  $\omega$  è la densità superficiale della intensità radiante (luminosa) in  $x$  lungo la direzione  $\omega$ , considerando l'area della superficie proiettata:

$$L(x, \omega) = \frac{dI(\omega)}{dx(\omega \cdot \mathbf{n})} = \frac{d^2\Phi}{d\omega dx(\omega \cdot \mathbf{n})} \quad (1)$$

- L'area *proiettata* della superficie infinitesima  $dx$  è l'area della proiezione di  $dx$  (la cui normale è  $\mathbf{n}$ ) sul piano perpendicolare ad  $\omega$ , e vale dunque  $dx(\omega \cdot \mathbf{n})$
- La direzione  $\omega$  è data da due angoli: l'elevazione  $\theta$  (rispetto alla normale alla superficie  $\mathbf{n}$ ) e l'azimuth  $\phi$  (rispetto ad una direzione fissata sulla superficie.)
- Possiamo dunque scrivere  $(\omega \cdot \mathbf{n}) = \cos \theta$
- La radianza  $L(x, \omega)$  è la densità di flusso nel punto  $x$  in una direzione  $\omega$ , misurata rispetto ad una superficie infinitesima perpendicolare a  $\omega$ .
- La radianza è pari al il flusso radiante per unità di angolo solido per unità di area proiettata lungo la direzione di propagazione, e si misura in  $[\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{st})]$ .



## Radianza lungo un raggio

- Dati due punti  $x$  e  $y$  (nel vuoto) la radianza che lascia  $x$  verso  $y$  è uguale a quella che raggiunge  $y$  dalla direzione di  $x$ : la radianza non si attenua con la distanza.
- Il modello che si usa in Grafica è quello di raggi luminosi che trasportano una certa quantità di energia luminosa.
- Nel ray casting, dunque, **i raggi luminosi trasportano radianza**, ed i pixel registrano il valore della radianza (idealmente)
- Quando – informalmente – si parla di “intensità” del pixel, si fa riferimento alla radianza.
- In realtà non è possibile rappresentare linearmente la radianza nell’intervallo  $[0,255]$  senza perdita di informazione, poiché quest’ultima ha una gamma dinamica più elevata.
- Nelle tipiche immagini, quindi, il valore di “intensità” del pixel è legato al **logaritmo della radianza**.

## Radiosità e Radianza

- Sia  $\Omega$  la semisfera delle direzioni attorno alla normale in  $x$ . Dalla (1) si ha:

$$L(x, \boldsymbol{\omega})(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}) = \frac{d^2\Phi}{d\boldsymbol{\omega}dx}$$

ed integrando:

$$\int_{\Omega} L(x, \boldsymbol{\omega})(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n})d\boldsymbol{\omega} = \int_{\Omega} \frac{d^2\Phi}{d\boldsymbol{\omega}dx}d\boldsymbol{\omega} = \frac{d\Phi}{dx} = B(x)$$

- Similmente, per l'energia incidente, l'irradianza vale:

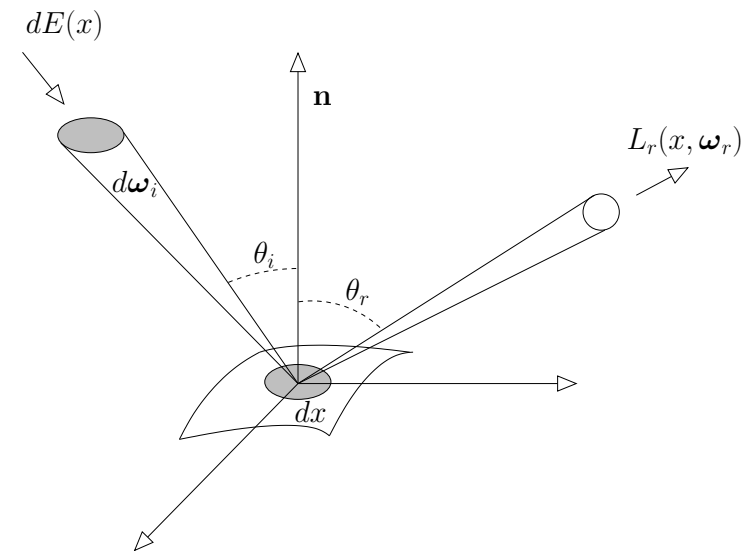
$$E(x) = \int_{\Omega} L(x, \boldsymbol{\omega})(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n})d\boldsymbol{\omega}$$

- Nota: la radianza è definita per unità di area proiettata, mentre la irradianza/radiosità sono definite per unità di area (effettiva).

## Caratterizzazione delle superfici: BRDF

- Vogliamo ora descrivere quantitativamente come una superficie riflette la luce incidente.
- Introduciamo la Bidirectional Reflectance Distribution Function (BRDF)  $\rho(x, \omega_i, \omega_r)$  è per caratterizzare il **materiale** di cui è composta la superficie (non dipende dalla geometria).
- La BRDF  $\rho(x, \omega_i, \omega_r)$ , è il rapporto tra la radianza riflessa da  $x$  lungo la direzione  $\omega_r$  e la irradianza della luce incidente nel punto  $x$  da un angolo solido infinitesimale  $d\omega_i$  centrato in  $\omega_i$ :

$$\rho(x, \omega_i, \omega_r) = \frac{L_r(x, \omega_r)}{dE(x)}$$



- Si usa la irradianza per misurare la densità di flusso incidente – e non la radianza – perché quest'ultima non tiene conto della reale orientazione della superficie, mentre la irradianza rappresenta la effettiva densità di flusso incidente.
- Si vede facilmente che la irradianza è legata alla radianza della luce incidente  $L_i(x, \omega_i)$  da:

$$dE(x) = L_i(x, \omega_i)(\omega_i \cdot \mathbf{n})d\omega_i$$

dove  $(\boldsymbol{\omega}_i \cdot \mathbf{n}) = \cos \theta_i$ .

- Dunque la BRDF si scrive:

$$\rho(x, \boldsymbol{\omega}_i, \boldsymbol{\omega}_r) = \frac{L_r(x, \boldsymbol{\omega}_r)}{L_i(x, \boldsymbol{\omega}_i)(\boldsymbol{\omega}_i \cdot \mathbf{n})d\boldsymbol{\omega}_i}$$

- siccome la radianza è definita per unità di area proiettata, moltiplicando per  $(\boldsymbol{\omega}_i \cdot \mathbf{n})$  la si converte in una misura per unità di area (non proiettata).
- In altri termini, si tiene conto del fatto che la radianza è misurata rispetto ad un'area infinitesima orientata diversamente da quella che in effetti viene illuminata, mentre noi vogliamo esprimere l'effettivo flusso incidente.
- Se consideriamo i contributi di irradianza da tutte le direzioni di incidenza  $\Omega$ , la radianza totale riflessa nella direzione  $\boldsymbol{\omega}_r$ , è vale:

$$L_r(x, \boldsymbol{\omega}_r) = \int_{\boldsymbol{\omega}_i \in \Omega} \rho(x, \boldsymbol{\omega}_i, \boldsymbol{\omega}_r) L_i(x, \boldsymbol{\omega}_i)(\boldsymbol{\omega}_i \cdot \mathbf{n})d\boldsymbol{\omega}_i$$

## BRDF Lambertiana

- Una superficie Lambertiana (o diffusore perfetto) ha una BRDF costante:  
 $\rho(x, \omega_i, \omega_r) = \rho(x)$ . La radianza (riflessa) di tale superficie non dipende dalla direzione.

$$L_r(x, \omega_r) = \rho(x) \int_{\Omega} L_i(x, \omega_i) (\omega_i \cdot \mathbf{n}) d\omega_i = \rho(x) E(x) = L(x)$$

Inoltre

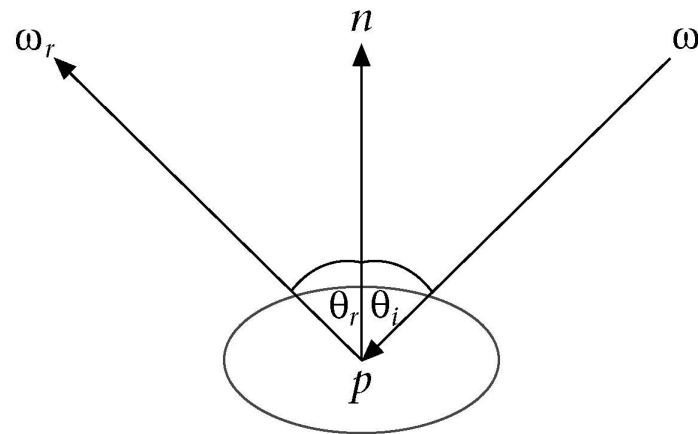
$$B(x) = \int_{\Omega} L(x, \omega) (\omega \cdot \mathbf{n}) d\omega = L(x) \int_{\Omega} \cos \theta d\omega = \rho(x) E(x) \pi$$

$\rho_d(x) = \pi \rho(x)$  prende il nome di **albedo**.

- L'albedo è la frazione di irradianza  $E(x)$  che viene riflessa come radiosità  $B(x)$ . Il resto dell'energia viene assorbito.

## BRDF generiche

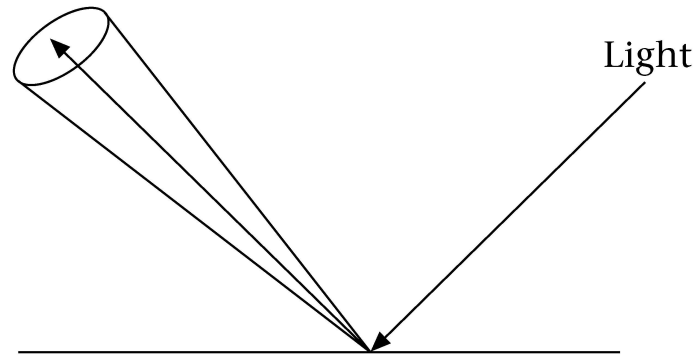
- La specifica esatta della BRDF per superfici reali è estremamente difficile da ottenere.
- Nella grafica al calcolatore si usano approssimazioni della BRDF. Le due più semplici e più usate modellano due comportamenti ideali dei materiali: riflessione speculare e diffusione.



©Slater et al.

- Un **riflettore speculare** si comporta come uno specchio perfetto, che riflette il raggio incidente lungo una direzione che forma con la normale lo stesso angolo formato dalla direzione di incidenza.

- In un materiale lucido (*glossy*) il raggio incidente viene disperso in un cono attorno alla direzione di riflessione perfetta.



©Slater et al.

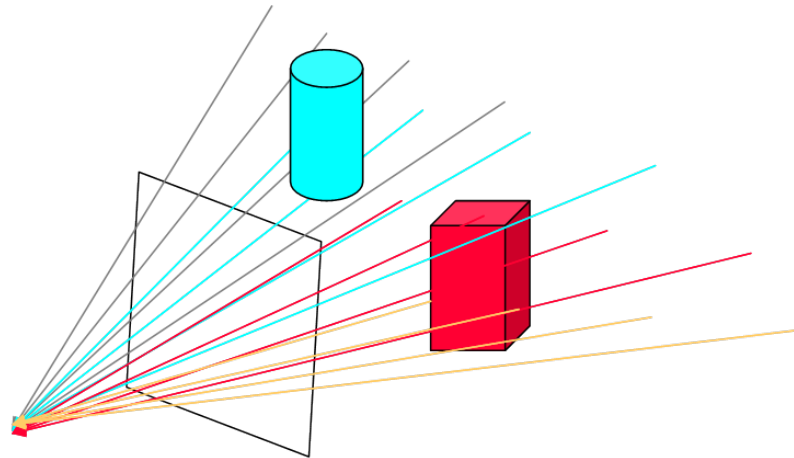
- Un diffusore perfetto è una superficie ruvida (come il gesso o il coccio) che ripartisce la radianza del raggio entrante uniformemente su tutte le direzioni lungo una semisfera.
- Tipicamente le BRDF che si usano in Grafica sono una mistura di queste due.
- Abbiamo omesso la dipendenza dalla lunghezza d'onda  $\lambda$ , ma la BRDF, in generale, dipende anche da  $\lambda$ , ed è grazie a ciò che le superfici appaiono **colorate**.
- La luce bianca (spettro uniforme) incide sulla superficie e grazie all'assorbimento selettivo delle componenti cromatiche la luce riflessa ha una distribuzione spettrale non uniforme, ovvero è "colorata".



# Equazione del rendering

- Tutto ciò che serve per disegnare una immagine è la radianza che lascia ciascun punto della scena nella direzione dell'occhio.
- Fissando un centro di proiezione (COP) che coincide con l'occhio si calcola la radianza di tutti i raggi passanti per il COP entro l'angolo di vista  $\Gamma$ :

$$\text{image} = L(\text{COP}, \omega) \quad \omega \in \Gamma$$



©Slater et al.

- Come calcolare, per ogni punto della scena, la radianza emessa in una particolare direzione? Bisogna risolvere l'**equazione del rendering**.

- Abbiamo visto che la radianza riflessa nella direzione  $\omega_r$ , dovuta alla irradianza lungo una direzione particolare  $\omega_i$  è:

$$L_r(x, \omega_r) = \rho(x, \omega_i, \omega_r) L_i(x, \omega_i) (\omega_i \cdot \mathbf{n})$$

- La radianza totale riflessa nella direzione  $\omega_r$ , è la somma dei contributi dovuti a tutte le possibili direzioni incidenti,  $\Omega$ , quindi vale:

$$L_r(x, \omega_r) = \int_{\Omega} \rho(x, \omega_i, \omega_r) L_i(x, \omega_i) (\omega_i \cdot \mathbf{n}) d\omega_i$$

- Aggiungiamo la radianza emessa  $L_e(x, \omega)$  ottenendo la fondamentale **equazione del rendering**, o della radianza (Kajiya, 1987), che esprime la radianza totale che lascia il punto  $x$  nella direzione  $\omega$ :

$$L(x, \omega) = L_e(x, \omega) + \int_{\Omega} \rho(x, \omega_i, \omega) L(x, \omega_i) (\omega_i \cdot \mathbf{n}) d\omega_i \quad (2)$$

- La radianza incidente in  $x$  lungo la direzione  $\omega_i$ ,  $L(x, \omega_i)$ , è uguale alla radianza emessa da un altro punto  $y$  nella direzione sotto cui  $y$  vede  $x$ :  $L(x, \omega_{xy}) = L(y, \omega_{yx})$  (con  $\omega_i = \omega_{xy}$ ).
- L'angolo solido infinitesimo  $d\omega$  sotto cui  $y$  vede  $dx$  vale:  $d\omega = \frac{dy \cos \theta_{yx}}{\|x - y\|^2}$
- Introduciamo il **termine di visibilità**  $V(x, y)$  che vale 1 sse  $x$  è visibile da  $y$
- Possiamo quindi trasformare l'**equazione del rendering** da integrale su una semisfera di direzioni ad integrale su tutte le superfici  $S$  della scena:

$$L(x, \omega) = L_e(x, \omega) + \int_{y \in S} \rho(x, \omega_{xy}, \omega) L(y, \omega_{yx}) G(x, y) dy \quad (3)$$

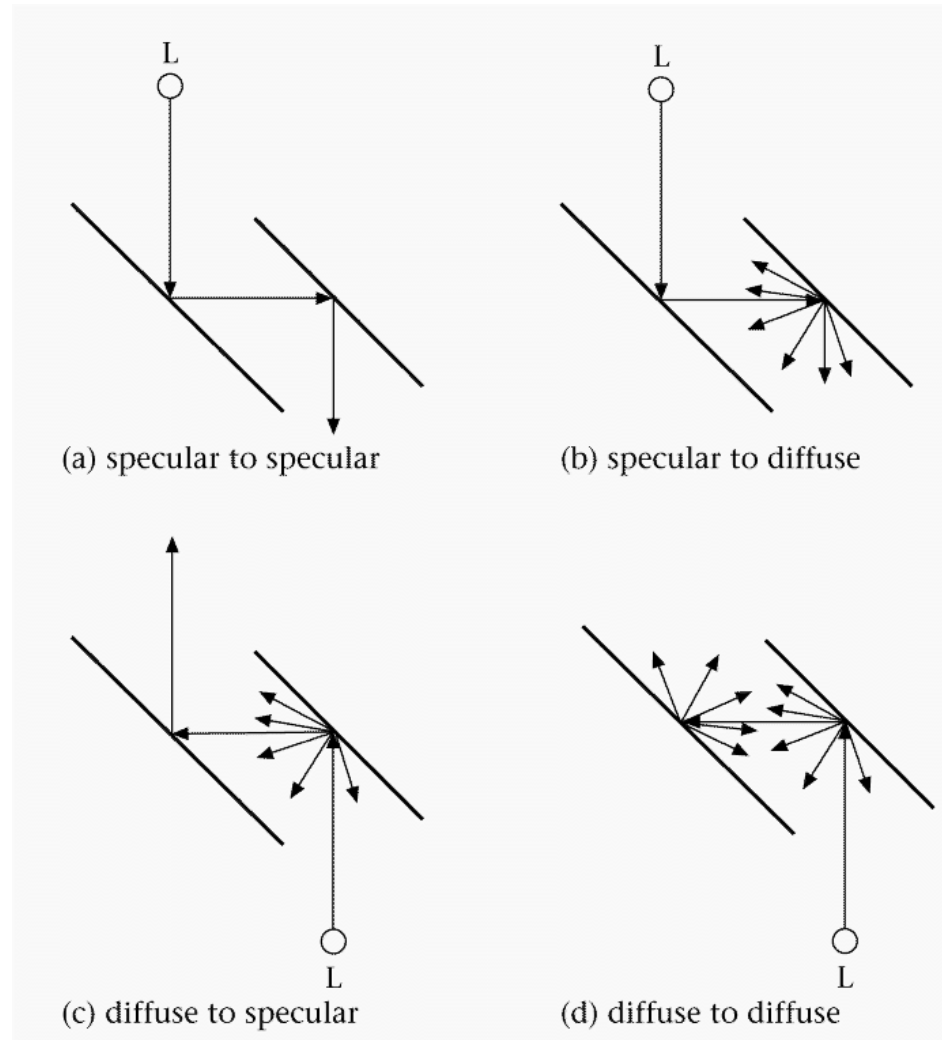
- il termine  $G(x, y) = \frac{\cos \theta_{xy} \cos \theta_{yx}}{\|x - y\|^2} V(x, y)$  dipende solo dalla geometria della scena.
- La funzione incognita  $L$  appare anche a destra dell'uguale: per calcolare la radianza emessa in  $y$  si impiega nuovamente l'equazione 2, in modo **ricorsivo**.
- Per determinare  $y$  si traccia un raggio da  $x$  lungo  $\omega_i$  e lo si segue fino a quando incontra una superficie (come fare ray-casting con COP in  $y$ ).

## Soluzioni della equazione della radianza: uno sguardo in avanti.

- L'equazione del rendering mostra che la radianza in un punto di una superficie è determinata **globalmente**, poiché dipende non solo dalle sorgenti luminose (primarie) ma anche da tutte (in principio) le altre superfici presenti nell'ambiente (sorgenti secondarie).
- La soluzione della equazione del rendering è estremamente onerosa: possiamo dire che gran parte della Grafica è dedicata alla soluzione di questa equazione.
- Diversi approcci propongono soluzioni approssimate, più o meno grossolane. Le approssimazioni riguardano due aspetti: la BRDF e la ricorsione.
- Per quanto riguarda quest'ultimo aspetto, i metodi si dividono in locali e globali.
- **Locali.** I metodi locali tengono conto solo dell'effetto diretto delle sorgenti luminose, trascurando le interriflessioni tra oggetti. Questo elimina completamente la ricorsione nell'equazione della radianza, in quanto viene considerata la radianza entrante solo lungo le direzioni corrispondenti a raggi provenienti direttamente dalle sorgenti luminose (la cui radianza è nota e non deve essere calcolata ricorsivamente).
- **Globali.** I metodi globali tengono conto della natura ricorsiva della equazione della radianza, anche se ciascuno trascura alcuni fenomeni di interriflessione per rendere il problema trattabile. In particolare, vedremo una tecnica (**ray tracing**) che è corretta per le riflessioni speculari, ed un'altra (**radiosity**) che modella solo le interiflessioni tra superfici diffuse.

- Il **ray tracing** estende ricorsivamente il paradigma del ray casting per determinare il percorso dei soli raggi riflessi specularmente e rifratti. Gli altri contributi alla radianza sono calcolati con metodi locali.
- Il **radiosity**, come il nome suggerisce, riformula l'equazione della radianza in termini di radiosità, perdendo dunque la direzionalità. Per questo è corretta solo se la scena è composta da diffusori perfetti.
- Queste due tecniche introducono un'altra dicotomia, tra soluzioni **view-dependent** e **view-independent**. Il ray tracing è view-dependent in quanto la soluzione che trova dipende dalla posizione dell'osservatore. La soluzione di radiosity, invece, viene calcolata in relazione alle superfici della scena e non dipende dalla posizione dell'osservatore.
- Tra le approssimazioni della BRDF la più semplice è quella di porre  $\rho = 0$ . In questo modo l'integrale nella azzerarla (2) si azzerava e si ottiene  $L(x, \omega) = L_e(x, \omega)$ . In pratica questo significa che ogni punto ha una radianza (colore) preassegnata (color texture). Altre tecniche un pò più realistiche modellano superfici con BRDF miste, Lambertiane e lucide (modelli di Phong, Cook-Torrance ed altri).

Assumendo che vi siano due tipi di superfici ideali nella scena (diffusive e speculari) vi sono 4 meccanismi di trasmissione della luce tra superfici:



©Slater et al.

Ray tracing modella la situazione a), Radiosity la situazione d), per le altre due ci sono metodi probabilistici (Monte Carlo) che non vedremo.