Fondamenti

Dove si richiamano brevemente alcuni concetti di algebra lineare, si fissa la notazione e si introducono alcune strutture dati.

- **Spazi vettoriali ed affini**
- **Matrici e Trasformazioni**
- **Richiami di geometria analitica**
- **Poligoni**
- **Strutture dati geometriche**

Spazi vettoriali ed affini

- Per parlare di grafica al calcolatore risultano utili alcuni concetti di geometria elementare e di algebra lineare; in particolare avremo a che fare con tre tipi di spazi:
  - **Spazi vettoriali lineari** che contengono due tipi diversi di oggetti, gli **scalari** ed i **vettori**
  - **Spazi affini**, che sono spazi vettoriali a cui si aggiunge il concetto di **punto**
  - **Spazi euclidei** che aggiungono il concetto di **prodotto interno** (distanze ed angoli)
- Lo spazio più usato ai fini della grafica 3D è lo spazio euclideo tridimensionale
- Studieremo inoltre le trasformazioni su tali spazi

Scalari

Gli **scalari** S costituiscono un **corpo** (tipicamente useremo $\mathbb{R}$) con due operazioni, **somma** e **moltiplicazione**, che soddisfano le seguenti relazioni

$$\forall\, \alpha\, \beta\, \gamma\ \in S$$

Commutatività

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha$$

$$\alpha\beta = \beta\alpha$$

Associatività

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$$

$$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$$

Distribuzione

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$$

Elementi neutri

$$\exists 0 \in S : \forall\alpha \in S\, \alpha + 0 = \alpha$$

$$\exists 1 \in S : \forall\alpha \in S\, \alpha 1 = \alpha$$

Elementi inversi

$$\forall\alpha \in S \exists(-\alpha) \in S :\ \alpha + (-\alpha) = 0$$

$$\forall\alpha \in S \exists\alpha^{-1} \in S :\ \alpha\alpha^{-1} = 1$$

Vettori

- I **vettori** costituiscono un **gruppo abeliano** (additivo) V in cui è definito il prodotto di un vettore per uno scalare
- Indicheremo sempre i vettori con caratteri minuscoli in grassetto (in genere usando le ultime lettere dell'alfabeto)
- La definizione è totalmente astratta, ma per semplicità conviene considerare due utili esempi di spazi vettoriali lineari:
  - **Geometrico**
  - **Algebrico**

Chiusura

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V \quad \forall \mathbf{u}\mathbf{v} \in V$$

$$\alpha\mathbf{v} \in V \quad \forall \alpha \in S\,\mathbf{v} \in V$$

Proprietà algebriche

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$$

$$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$$

$$\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$$

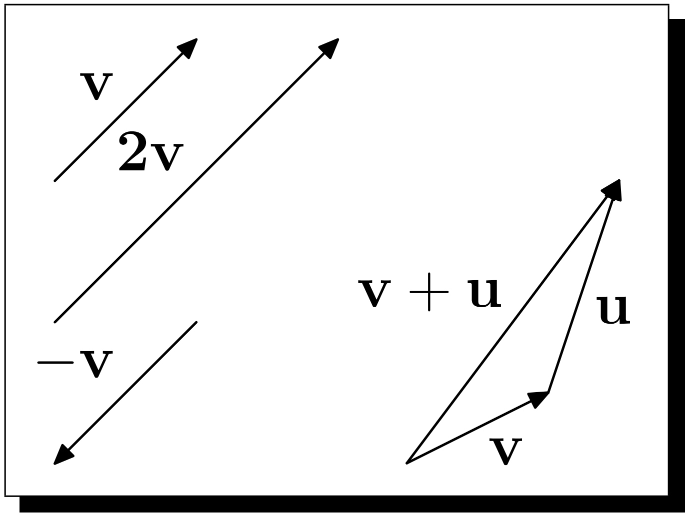
$$(\alpha + \beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u}$$

$$\exists \mathbf{0} \in V : \forall \mathbf{u} \in V\ \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$$

$$\forall \mathbf{u} \in V \exists (-\mathbf{u}) \in V :\ \mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$$

Un esempio geometrico

- Un esempio concreto è dato dai segmenti orientati liberi, ovvero senza un punto di applicazione specificato
- Il prodotto con uno scalare (numeri reali) cambia la lunghezza del vettore
- La somma di due vettori è data dalla regola del parallelogramma



Un esempio algebrico

- Un altro esempio è dato dall'insieme delle n-ple ordinate di $\mathbb{R}^n$

$$\mathbf{v} = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \quad \beta_i \in \mathbb{R}\, \forall i$$

- Il prodotto per uno scalare e la somma di due vettori sono definiti in modo del tutto naturale

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) + (\beta_1, \ldots, \beta_n) = (\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n)$$
$$\alpha(\beta_1, \ldots, \beta_n) = (\alpha\beta_1, \ldots, \alpha\beta_n)$$

- È facile vedere qual'è l'elemento neutro e qual'è l'inverso di un vettore

Indipendenza lineare e dimensione dello spazio

- Dati n vettori non nulli, si dicono **linearmente indipendenti** se qualsiasi loro combinazione lineare a coefficienti non tutti nulli è diversa dal vettore nullo

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0} \Leftrightarrow \alpha_i = 0 \, \forall i$$

- Si dice **dimensione** di uno spazio vettoriale il massimo numero di vettori linearmente indipendenti
- In uno spazio vettoriale a dimensione n, un insieme di n vettori linearmente indipendenti si dice una **base** per lo spazio
- Ogni vettore può essere scritto come combinazione lineare dei vettori di una base

$$\forall \, \mathbf{v} \in V \exists \, (\alpha_1 \ldots \alpha_n) : \mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n$$

Componenti e rappresentazione concreta

- Fissata quindi una base in uno spazio vettoriale, ad ogni vettore corrisponde una n-pla di scalari, ovvero i coefficienti dello sviluppo lineare del vettore nei vettori di base; tali scalari sono le componenti del vettore rispetto alla base data.
- In genere il corpo è dato dai reali; abbiamo quindi ottenuto la rappresentazione concreta vista prima di uno spazio vettoriale astratto come insieme di n-ple di $\mathbb{R}^n$
- Tale rappresentazione dipende dalla base scelta

Punti

- I vettori non rappresentano punti nello spazio, ma solo **spostamenti**. Per poter introdurre il concetto di **posizione** si deve passare agli **spazi affini** che sono degli spazi vettoriali a cui si aggiunge il concetto di **punto**.
- I **punti** sono definiti in senso astratto come elementi dello stesso insieme su cui è definito lo spazio vettoriale.
- Lo spazio affine quindi è composto da vettori e punti, e dotato di una operazione "$+$" che soddisfa le seguenti relazioni:
  - $P + \mathbf{0} = P$
  - $(P + \mathbf{u}) + \mathbf{v} = P + (\mathbf{u} + \mathbf{v})$
  - $\forall P, Q \quad \exists \mathbf{u} : P + \mathbf{u} = Q$
- abbiamo definito quindi una somma tra un punto ed un vettore il cui risultato è un punto: l'interpretazione geometrica è che i punti sono locazioni nello spazio e sommando uno spostamento ad un punto si ottiene un altro punto.
- è importante non confondere punti e vettori, sono entità geometriche ben distinte.

Le combinazioni affini

- **Non** è definita una somma tra punti e neppure un prodotto di uno scalare per un punto; in generale sono operazioni non lecite, ma c'è una eccezione
- Si prendano tre punti P, Q ed O e si consideri il seguente punto

$$P' = \alpha(P - O) + \beta(Q - O) + O$$

- P' non dipende da O, ma solo dai punti P e Q, se e solo se $\alpha + \beta = 1$
- In questo caso P' è la **combinazione affine** di P con Q e si scrive, in modo improprio, come somma pesata dei punti P e Q

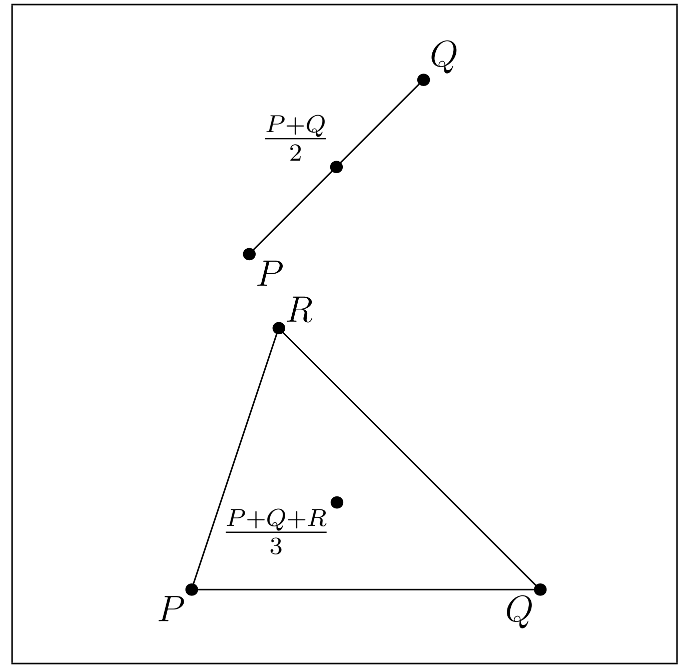
$$P' = \alpha P + \beta Q$$

- La combinazione affine di due punti distinti descrive la **retta** passante per i due punti.
- La combinazione affine si estende in modo naturale a n punti

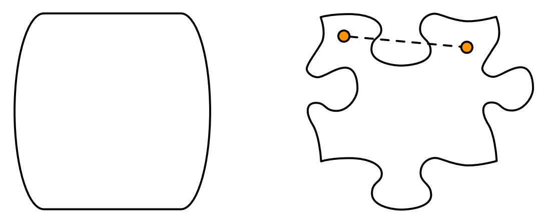
$$P' = \sum_i \alpha_i P_i, \quad \sum_i \alpha_i = 1 \quad \alpha_i \in \mathbb{R}$$

- Un insieme di punti si dice **affinemente indipendente** se nessun punto è combinazione affine degli altri.

- La **combinazione convessa** è una combinazione affine con pesi positivi.
  - Nel caso della combinazione convessa di due punti, il punto risultante giace sul segmento che congiunge i due punti. Se i pesi sono entrambi pari a $\frac{1}{2}$, il punto risultante si trova a metà tra i due punti
  - Nel caso di n punti che formano un poligono convesso, il punto risultante si trova all'interno del poligono. Se tutti i pesi sono pari a $\frac{1}{n}$, il punto risultante si chiama **centroide** dell'insieme dei punti.

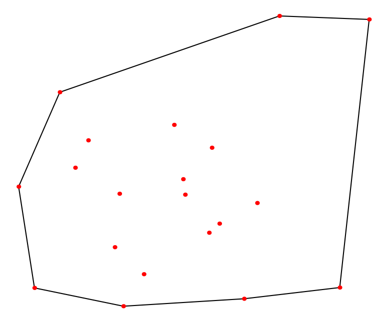


- Un insieme $\mathcal{C}$ in $\mathbb{R}^n$ è **convesso** se per ogni coppia di punti P_1 e P_2 appartenenti a $\mathcal{C}$ si ha che $P' = \alpha(P_1 - P_2) + P_2$ appartiene a $\mathcal{C}$ per ogni $\alpha \in [0, 1]$ ovvero tutti i punti sul segmento che unisce P_1 con P_2 appartengono all'insieme $\mathcal{C}$.



Convesso Non convesso

- Il **guscio convesso** di un insieme di punti è la più piccola regione convessa che contiene tutti i punti dati.



Prodotto interno

- In uno spazio affine non è ancora definito il concetto di distanza o di angolo tra vettori; questi li si ottiene passando ad uno **spazio euclideo** che è uno spazio affine provvisto di un **prodotto interno** tra vettori che soddisfa le seguenti relazioni

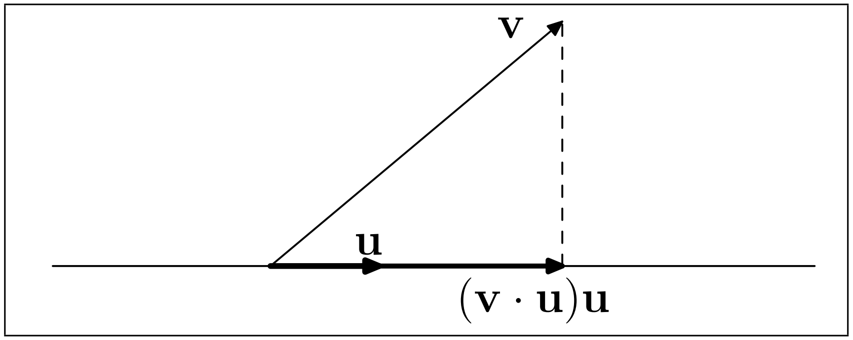
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \in S$$
$$(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \alpha \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \beta \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$$
$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} > 0 \quad (\mathbf{v} \neq \mathbf{0})$$
$$\mathbf{0} \cdot \mathbf{0} = 0$$

- Se il prodotto interno di due vettori e nullo, diremo che i due vettori sono **ortogonali**.

- Grazie al prodotto interno è possibile definire la lunghezza di un vettore (e quindi la distanza tra due punti) e l'angolo tra due vettori

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \qquad \cos\theta = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{\|\mathbf{v}\| \|\mathbf{u}\|}$$

- Il prodotto scalare può essere usato, ad esempio, per trovare la proiezione di un vettore lungo una retta
- Sia dato il vettore $\mathbf{v}$ e la retta con direzione identificata dal vettore di lunghezza unitaria $\mathbf{u}$; il vettore ottenuto proiettando $\mathbf{v}$ lungo la retta sarà della forma $\mathbf{v}' = t\mathbf{u}$ dove t è un parametro
- si può dimostrare che $t = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$



Basi ortonormali

- Diremo che un vettore è **normalizzato** se la sua lunghezza è pari a 1; dato un vettore qualsiasi lo si può normalizzare moltiplicandolo per il reciproco della sua lunghezza. Un vettore normalizzato si dice anche **versore**
- Diremo che una base per i vettori di uno spazio euclideo è **ortonormale** se è formata da versori a due a due ortogonali

$$(\mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_n) : \; \|\mathbf{e}_i\| = 1 \, \forall i \quad \text{e} \quad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0 \; \forall \, i \neq j$$

- Data una base ortonormale il prodotto interno tra due vettori si esprime come somma dei prodotti delle componenti (usuale prodotto scalare di vettori)

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_1 w_1 + \cdots + v_n w_n$$

- data una base qualsiasi è sempre possibile derivare da essa una base ortonormale (procedimento di Gram-Schmidt)

Terne destrorse e sinistrorse in tre dimensioni

- In tre dimensioni una base ortonormale $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ si dice **destrorsa**, ovvero possiede un **orientamento** destrorso, se la rotazione attorno ad $\mathbf{e}_3$ che porta $\mathbf{e}_1$ a coincidere con $\mathbf{e}_2$ è **antioraria** se vista dalla parte positiva di $\mathbf{e}_3$.
- Se tale rotazione è **oraria** allora la base è **sinistrorsa**
- Si può usare la **prima regola della mano destra**: se si pone il pollice nella direzione di $\mathbf{e}_3$, allora la rotazione che porta $\mathbf{e}_1$ in $\mathbf{e}_2$ deve seguire il modo naturale con cui si piegano le altre dita.
- Oppure si può usare la **seconda regola della mano destra** per determinare la destrorsità, o meno, di una base; se si riesce a porre i tre vettori di base in corrispondenza con il **pollice**, l'**indice** ed il **medio** della mano destra, tenuti perpendicolari l'uno all'altro, allora la base è destrorsa, altrimenti è sinistrorsa.
- La scelta di un orientamento è del tutto arbitraria, basta essere coerenti. Se non specificato diversamente useremo sempre basi destrorse

Riferimenti

- Il concetto di **base** si estende a quello di **riferimento** in uno spazio affine (o euclideo) specificando, oltre alla base, anche un punto O detto **origine** del riferimento.
- Poiché ogni vettore dello spazio è sviluppabile in una base data ed ogni punto è esprimibile come somma di un punto dato e di un vettore, dato un riferimento $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, O)$, i punti ed i vettori dello spazio saranno esprimibili nel seguente modo:

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3$$
$$P = p_1\mathbf{e}_1 + p_2\mathbf{e}_2 + p_3\mathbf{e}_3 + O$$

- Un riferimento **cartesiano** è dato da un riferimento la cui base di vettori sia ortonormale
- Un riferimento è destrorso se lo è la sua base.

Coordinate omogenee

- Diamo la seguente definizione di prodotto di un punto per 1 e per 0

$$P \cdot 1 = P \qquad P \cdot 0 = 0$$

- In questo modo possiamo definire le **coordinate omogenee** di un punto e di un vettore rispetto ad un riferimento $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, O)$

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3, 0) \tag{1}$$

$$P = (p_1, p_2, p_3, 1) \tag{2}$$

- In realtà non c'è nulla di speciale nella scelta di 0 e 1 come ultima coordinata per vettori e punti, andrebbe bene qualsiasi valore
- Con tale scelta però è possibile fare un **type checking**:
  - si trattano le 4-ple delle coordinate omogenee come vettori
  - quando si effettua una qualsiasi combinazione lineare di punti e vettori, usando le usuali regole di moltiplicazione per uno scalare e di somma tra vettori, basta vedere l'ultima coordinata del risultato
  - se è pari a 0, allora il risultato è un **vettore**; se è pari a 1 allora il risultato è un **punto**. Se non è ne 0 ne 1, allora si è effettuata una operazione non lecita

Vettori in 3 dimensioni

- Riassumiamo quanto visto nel caso dello spazio euclideo tridimensionale (quello che useremo nel seguito)
- Gli **scalari** sono numeri reali
- I **vettori** identificano direzioni nello spazio
- I **punti** determinano posizioni nello spazio
- Operazioni ammesse: somma e prodotto tra scalari, prodotto di scalari per vettori, somma di vettori, differenza di punti, somma di un punto con un un vettore, combinazioni affini.
- Il **prodotto scalare** permette di determinare la lunghezza dei vettori, la distanza tra punti e l'angolo tra due vettori
- Conviene lavorare in una **base ortonormale**; in questo caso il prodotto scalare tra due vettori è particolarmente semplice
- In genere i tre assi che formano la base si chiamano **assi coordinati** e si usano le lettere x, y e z per indicarli (ma a volte useremo anche $1, 2$ e 3).

Il prodotto vettore

- Nel caso particolare delle tre dimensioni è utile introdurre un ulteriore operazione tra vettori: il **prodotto vettore**
- Si tratta di un caso particolare di prodotto denominato **esterno**; in tre dimensioni è particolarmente semplice, per cui lo definiamo solo in questo caso particolare
- In termini delle componenti di due vettori il prodotto vettore risulta essere il seguente:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left(u_y v_z - u_z v_y, u_z v_x - u_x v_z, u_x v_y - u_y v_x\right)$$

- Si dimostra che il prodotto vettore di due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è un vettore **ortogonale** al piano contenente i due vettori e di modulo pari all'area definita da $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. Il verso è scelto in modo tale che $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \times \mathbf{v})$ formino una terna destrorsa
- Attenzione: il prodotto vettore (a differenza delle proprietà affini dello spazio) **dipende** dalla scelta del tipo di base, destrorsa o sinistrorsa

Matrici e trasformazioni

Introduciamo ora lo studio delle trasformazioni definite sugli spazi visti. Prima però, giusto per fissare la notazione e per rinfrescare la memoria, ricordiamo cosa sono le matrici e quali operazioni ammettono.

- Una matrice è essenzialmente un **array bidimensionale di elementi**; per i nostri scopi gli elementi saranno sempre degli scalari, tipicamente numeri reali.
- In genere una matrice A con M righe ed N colonne si scrive nel seguente modo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M1} & \cdots & a_{MN} \end{pmatrix}$$

- Una matrice in cui $N = M$ si dice **quadrata**
- Il caso limite in cui $M = 1$ coincide con la rappresentazione algebrica di un vettore (o con la N-pla delle sue componenti)

- Una matrice A può essere moltiplicata per uno scalare β ottenendo una matrice $C = \beta A$ definita nel seguente modo (che estende in modo naturale il prodotto di un vettore per uno scalare)

$$c_{ij} = \beta a_{ij} \quad \forall i, j$$

- Due matrici A e B si possono sommare se e solo se hanno lo stesso numero di righe e di colonne; in tal caso si ha $C = A + B$ data da

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \forall i, j$$

- Il **prodotto tra matrici** è definito solo quando il numero di colonne della prima matrice è uguale al numero di righe della seconda. Se A è una matrice $N \times M$ e B è una matrice $M \times K$, allora si ha $C = AB$ data da

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^{M} a_{il} b_{lj}$$

  La matrice risultante C è $N \times K$.

- Il prodotto tra matrici è associativo ($(AB)C = A(BC)$), ma non commutativo (in generale $AB \neq BA$)

- Definiamo la **matrice trasposta** di A, indicata con il simbolo A^T, la matrice ottenuta scambiando le righe con le colonne di A

$$a_{ij}^T = a_{ji}$$

  Da notare che se la matrice A è di tipo $N \times M$, allora la sua trasposta è di tipo $M \times N$. Si dimostra che $(AB)^T = B^T A^T$

- Adesso dovrebbe risultare chiaro cosa sia un vettore in formato *colonna* ed uno in formato *riga* e perché si sia usato il simbolo T di trasposto per denominare il primo

- D'ora in poi quando parleremo di trasformazione di un vettore $\mathbf{v}$ con una matrice A intenderemo sempre l'usuale prodotto di matrici tra A e il trasposto di $\mathbf{v}$ inteso come matrice con una sola colonna (per semplicità spesso ometteremo l'apice T sul vettore); ad esempio in due dimensioni si avrà:

$$A\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 \end{pmatrix}$$

- Introduciamo ora l'importante concetto di **determinante** di una matrice quadrata A, indicato con il simbolo $\det A$ o con il simbolo $|A|$. Per farlo usiamo una definizione ricorsiva:
  - il determinante di una matrice 2×2 è definito nel seguente modo

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

  - il determinante di una matrice $N \times N$ è dato dalla seguente formula

$$\det A = \sum_{j=1}^{N} (-1)^{j+k} a_{jk} det A_{jk}$$

    dove k è una colonna **qualsiasi** di A e dove il simbolo A_{jk} indica la matrice $(N-1) \times (N-1)$ ottenuta da A eliminando la riga j e la colonna k

- Si può dimostrare che $\det(AB) = \det A \, \det B$

- La matrice **identità** di ordine N è definita come una matrice I quadrata $N \times N$ con tutti gli elementi fuori diagonale nulli e gli elementi sulla diagonale pari a 1

- Data una matrice quadrata A questa si dice **invertibile** se esiste una matrice, indicata con A^{-1} tale che

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

  In tal caso A^{-1} si chiama **inversa** di A

- Si può dimostrare che una matrice è invertibile se e solo se il suo determinante è diverso da 0; in tal caso si ha

$$a_{ij}^{-1} = (-1)^{i+j} \frac{\det A_{ji}}{\det A}$$

Matrici come trasformazioni su spazi vettoriali

- Abbiamo visto cosa significa applicare una matrice ad un vettore
- Le matrici quadrate rappresentano quindi delle **applicazioni lineari** di uno spazio vettoriale in sè (formano un **gruppo non abeliano**)
- Tutte le applicazioni lineari di uno spazio vettoriale in sè sono esprimibili tramite matrici quadrate
- L'applicazione di più di una matrice ad un vettore si effettua sfruttando **l'algebra delle matrici**; ad esempio applicare prima A, poi B ed infine C equivale ad applicare la matrice CBA

Cambiamento di base tramite matrici

- Abbiamo già detto che dato uno spazio vettoriale esistono infinite basi
- Nella rappresentazione concreta il cambiamento da una base ad un'altra è descritto da una matrice
- **Attenzione:** prima abbiamo parlato di applicare una matrice ad un vettore per ottenere un **nuovo** vettore trasformato; adesso invece vogliamo una matrice che si applichi alle **componenti** di un vettore per ottenere le nuove componenti rispetto ad un'altra base dello **stesso** vettore.
- Studiamo il caso concreto di uno spazio vettoriale in 3 dimensioni per fissare le idee. Siano $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ e $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$ due basi ortonormali per lo spazio vettoriale
- Sia T la trasformazione che manda $\mathbf{e}_i$ in $\mathbf{e}'_i$ per $i = 1, 2, 3$
- Si può dimostrare che tale trasformazione esiste e che $t_{ij} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_j$
- Il generico vettore $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ viene trasformato da T nel vettore $\mathbf{v}' = T\mathbf{v}$
- Fino ad ora abbiamo parlato di vettori in modo indipendente dalle componenti e quindi dalla base

- Le componenti di $\mathbf{v}'$ nella base $\{\mathbf{e}'_i\}$ sono uguali alle componenti di $\mathbf{v}$ nella base $\{\mathbf{e}_i\}$ (perché lo trasformo assieme alla base).
- Sia quindi A la matrice del cambiamento di coordinate cercata; avremo

$$\mathbf{v}' = T\mathbf{v}$$
$$A\mathbf{v}' = AT\mathbf{v}$$
$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = AT \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

- Dovendo questa relazione valere per ogni vettore $\mathbf{v}$ si ha

$$A = T^{-1}$$

- Abbiamo dunque trovato la matrice A che trasforma le coordinate di un vettore dalla base $\{\mathbf{e}_i\}$ alla base $\{\mathbf{e}'_i\}$

- La matrice che trasforma le coordinate dalla base $\{\mathbf{e}'_i\}$ alla base $\{\mathbf{e}_i\}$ sarà ovviamente A^{-1}, ovvero T
- Ricordo ancora una volta che le componenti di $\mathbf{v}$ cambiano **non** perché $\mathbf{v}$ viene trasformato in un nuovo vettore, ma perché ho cambiato la base rispetto alla quale definisco le componenti dei vettori.
- In generale dato un vettore (v_1, v_2, v_3), la sua trasformazione in (v'_1, v'_2, v'_3) tramite la matrice B può essere vista o come una trasformazione identificata da B del vettore fissata la base, oppure come un cambiamento di base indotto dalla matrice B^{-1} tenendo fisso il vettore
- Nel primo caso si parla di **trasformazione attiva** sullo spazio, nel secondo caso di **trasformazione passiva**

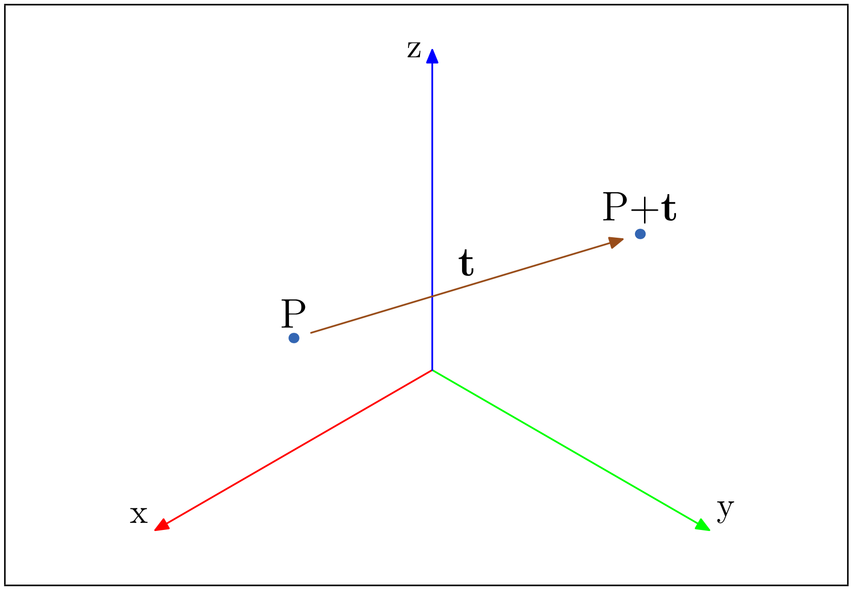
Trasformazioni affini

- Studiamo ora le trasformazioni affini che, come vedremo, sono di fondamentale importanza in computer graphics.
- Per definire una trasformazione in genere studieremo come si trasforma un punto generico e da questo ricaveremo la matrice di ordine 4 che agisce sulle coordinate omogenee del punto.
- Per una trasformazione affine, ovvero una trasformazione che preserva le combinazioni affini, rette parallele vengono trasformate in rette parallele.
- Usando le coordinate omogenee, si può rappresentare ogni trasformazione affine con una matrice (questo è uno dei motivi per usare le coordinate omogenee, l'altro è legato alle proiezioni).

Traslazioni

- Una **traslazione** determinata dal vettore $\mathbf{t}$ trasforma il punto P nel punto $P' = P + \mathbf{t}$
- In termini di componenti

$$\mathbf{t} = (t_x, t_y, t_z, 0)$$
$$P = (p_x, p_y, p_z, 1)$$
$$P' = (p_x + t_x, p_y + t_y, p_z + t_z, 1)$$



- È facile vedere che la matrice di trasformazione $T_{\mathbf{t}}$ per le coordinate omogenee è la seguente

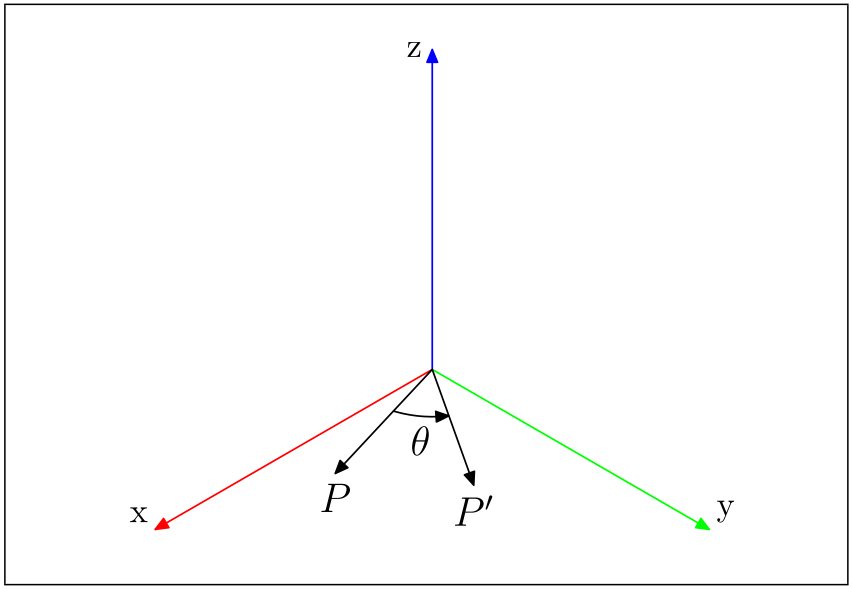
$$T_{\mathbf{t}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Si vede subito da questa matrice che i vettori non vengono modificati da una traslazione
- $T_{\mathbf{t}}^{-1} = T_{-\mathbf{t}}$
- È dimostrato che se non si fa uso delle coordinate omogenee, ovvero non si distinguono punti e vettori, non è possibile dare una rappresentazione matriciale alla traslazione.
- Questo giustifica – parzialmente – lo sforzo di introdurre i concetti di spazio affine e di punto rispetto a limitarsi ai soli spazi vettoriali.

Rotazioni attorno agli assi coordinati

- Una rotazione di un angolo θ in senso antiorario (prima regola della mano destra) intorno all'asse z determina la seguente trasformazione di un punto P in P'

$$\begin{aligned} p'_x &= p_x \cos(\theta) - p_y \sin(\theta) \\ p'_y &= p_x \sin(\theta) + p_y \cos(\theta) \\ p'_z &= p_z \end{aligned}$$



- Si può facilmente dimostrare che per rotazioni intorno all'asse x e y si hanno le seguenti espressioni rispettivamente:

$$\begin{aligned} p'_y &= p_y \cos(\theta) - p_z \sin(\theta) \\ p'_z &= p_y \sin(\theta) + p_z \cos(\theta) \\ p'_x &= p_x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p'_z &= p_z \cos(\theta) - p_x \sin(\theta) \\ p'_x &= p_z \sin(\theta) + p_x \cos(\theta) \\ p'_y &= p_y \end{aligned}$$

- Dovrebbe a questo punto essere facile dimostrare che le matrici che rappresentano le rotazioni rispetto agli assi coordinati sono quelle qui riportate
- Da notare che un vettore viene trasformato da una rotazione (a differenza delle traslazioni che lasciano i vettori inalterati)
- Le matrici date non commutano

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Alcuni commenti

- Le rotazioni rispetto agli assi cartesiani **non** commutano; provate a ruotare un oggetto (un libro ad esempio) di 90 gradi prima rispetto all'asse x e poi rispetto all'asse y. Ripetete quindi l'operazione prima rispetto all'asse y e poi rispetto all'asse x. Risultato?
- Vedremo nel seguito come trattare una rotazione rispetto ad un asse qualsiasi, non solo rispetto ad uno degli assi cartesiani
- Da notare che le rotazioni lasciano inalterati i punti che si trovano sull'asse di rotazione.
- Si può dimostrare che $R_x(\theta)^{-1} = R_x(-\theta)$ e similmente per gli altri assi
- Si può dimostrare che le matrici di rotazione date sopra sono **ortogonali**:
  $R_x(\theta)^{-1} = R_x(\theta)^T$ e similmente per gli altri assi
- La proprietà di ortogonalità è vera per ogni rotazione, non solo per quelle rispetto agli assi coordinati

Scalatura

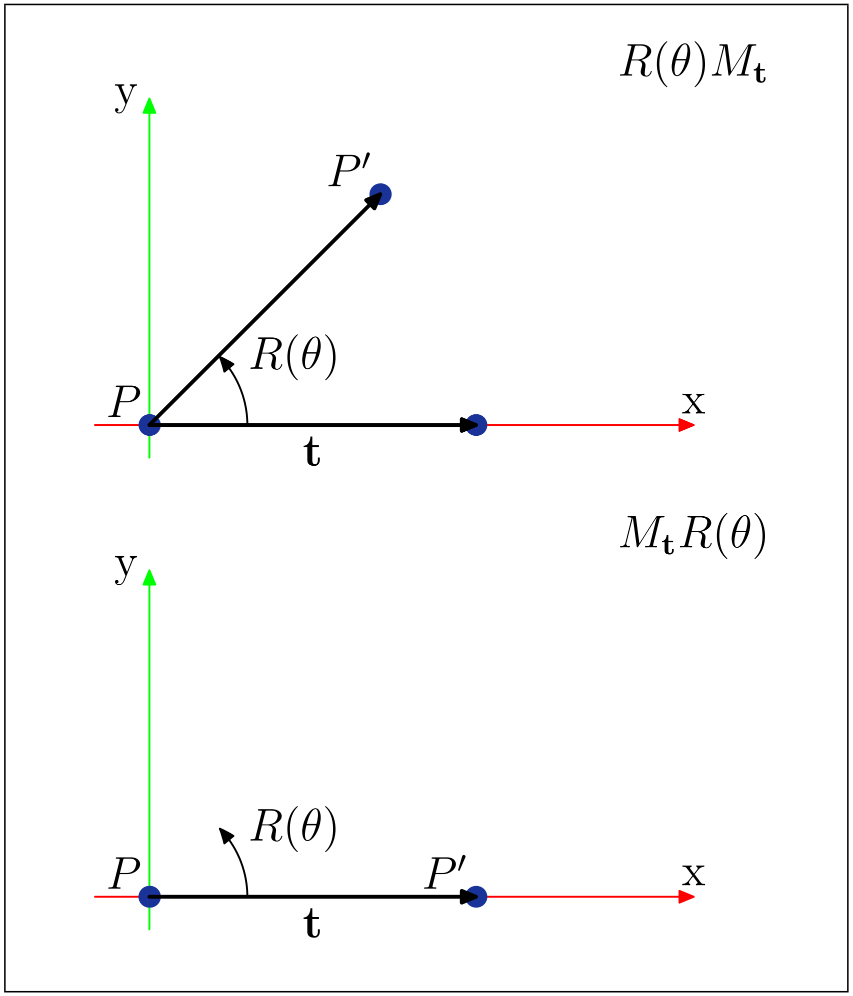
- Le traslazioni e le rotazioni hanno in comune una importante caratteristica: **conservano le distanze tra punti** ovvero conservano la lunghezza dei vettori.
- Esse costituiscono un sottogruppo delle trasformazioni affini chiamate **trasformazioni isometriche** o **rigide**.
- Le trasformazioni affini contengono un'altro elemento che non preserva le distanze tra punti e che ci interessa: la **scalatura** (vi sono altri tipi di trasformazioni affini che non ci interessano)
- Dato un punto $P = (p_x, p_y, p_z, 1)$ la trasformazione di scala, o scalatura, lo trasforma nel punto $P' = (s_x p_x, s_y p_y, s_z p_z, 1)$ dove i valori (s_x, s_y, s_z) sono i **fattori di scala** lungo gli assi coordinati
- Una scalatura è **omogenea** se $s_x = s_y = s_z = s$
  - In tal caso i vettori vengono semplicemente **allungati** o **accorciati** a seconda che s sia maggiore o minore di 1
  - Un punto, in una scalatura omogenea, viene semplicemente traslato lungo la retta che passa per l'origine e per il punto stesso, allontanandosi o avvicinandosi all'origine a seconda che s sia maggiore o minore di 1

Composizione di Trasformazioni

- Come si applica ad un punto dello spazio più di una trasformazione?
- Basta usare l'algebra delle matrici
- Date due trasformazioni rappresentate dalle matrici A e B, la composizione di A seguita da B sarà data dalla matrice BA.
- **Importante:** notare l'ordine delle matrici; siccome si applica la matrice risultante a sinistra del vettore delle coordinate omogenee, la trasformazione che viene effettuata per prima va a destra.
- La composizione di trasformazione si estende immediatamente al caso di più di due matrici

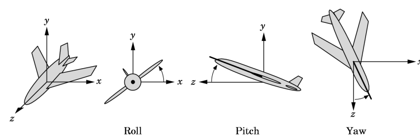
$$T = T_n \cdots T_1$$

- Come esempio tipico di non commutatività delle trasformazioni affini si può facilmente vedere che data una traslazione lungo il vettore $\mathbf{t}$ ed una rotazione di un angolo θ lungo l'asse z, si ottiene un risultato completamente diverso effettuando prima la rotazione e poi la traslazione o viceversa
- Per rendersene conto basta guardare come viene trasformato nei due casi un punto che in partenza si trova nell'origine



Rotazioni generiche

- In generale una rotazione qualsiasi rispetto ad un asse passante per l'origine può essere decomposta nel prodotto di tre rotazioni rispetto agli assi coordinati; i tre angoli prendono il nome di **angoli di Eulero**
- La rappresentazione con gli angoli di Eulero non è univoca, ovvero a terne diverse può corrispondere la stessa trasformazione.
- Una delle rappresentazioni di Eulero impiega gli angoli **roll** (rollio), **pitch** (beccheggio) e **yaw** (imbardata), di derivazione aeronautica.



- Per convenzione, stabiliamo che la rotazione specificata da roll$= \theta_r$, pitch$= \theta_p$ e yaw$= \theta_y$ è la seguente

$$R(\theta_r, \theta_p, \theta_y) = R_y(\theta_y) R_x(\theta_p) R_z(\theta_r)$$

- Abbiamo visto come ruotare punti e vettori attorno agli assi coordinati; come si fa a ruotarli attorno ad un asse generico passante per l'origine?
- Una rotazione $R(\theta, \mathbf{u})$ di un angolo θ attorno all'asse $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ si rappresenta con la seguente matrice (dim. sul Buss), dove $c = \cos\theta$ e $s = \sin\theta$:

$$R(\theta, \mathbf{u}) = \begin{pmatrix} (1-c)u_x^2 + c & (1-c)u_x u_y - s u_z & (1-c)u_x u_z + s u_y & 0 \\ (1-c)u_x u_y + s u_z & (1-c)u_y^2 + c & (1-c)u_y u_z - s u_x & 0 \\ (1-c)u_x u_z - s u_y & (1-c)u_y u_z + s u_x & (1-c)u_z^2 + c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Per ruotare attorno ad un asse generico, bisogna traslare l'asse nell'origine, ruotare ed infine applicare la traslazione inversa.
- Data una matrice di rotazione qualunque (ovvero ortogonale e con determinante positivo), si può risalire all'asse $\mathbf{u}$ ed angolo θ (formula e dim. sul Buss).

Generica trasformazione rigida

- Per quanto visto in precedenza, applicando la composizione di trasformazioni, una generica trasformazione rigida, composta da una rotazione R e da una traslazione $\mathbf{t}$ è data dalla seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} R & \mathbf{t} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$$

Cambiamenti di riferimento

- Fino ad ora abbiamo parlato di trasformazioni sui punti in senso attivo, ovvero il riferimento rimane fisso e i punti vengono mossi
- L'idea di cambiamento di base (trasformazione passiva) che abbiamo già affrontato si ripropone negli stessi termini anche per i cambiamenti di riferimento
- Dati due riferimenti $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, O)$ e $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3, 0')$ si tratta di trovare una matrice 4×4 che permetta di ottenere le coordinate affini di un punto rispetto al secondo riferimento date le coordinate affini dello **stesso** punto rispetto al primo
- Di nuovo in questo caso il punto rimane lo stesso, quello che cambiano sono le sue componenti
- Le cose vanno esattamente come nel caso dei cambiamenti di base di un riferimento, ovvero che se T è la trasformazione attiva che manda il primo riferimento nel secondo, allora T^{-1} è la matrice che trasforma le coordinate rispetto al primo riferimento nelle coordinate rispetto al secondo riferimento

Richiami di geometria analitica

- Vediamo ora di richiamare alcuni concetti di geometria analitica dello spazio 3D; in particolare siamo interessati a trovare le equazioni che descrivono alcune figure geometriche importanti dal punto di vista della grafica.

- **Rette:** sono identificabili da un punto qualsiasi Q che giaccia sulla retta e da una direzione data da un versore $\mathbf{u}$. È facile vedere che sono il luogo dei punti dati dalla seguente equazione

$$P = Q + t\mathbf{u} \quad t \in \mathbb{R}.$$

  In termini di componenti si vede facilmente che vale la seguente equazione

$$\frac{x - x_Q}{u_x} = \frac{y - y_Q}{u_y} = \frac{z - z_Q}{u_z}$$

  Se si vuole specificare una retta dati due punti R e Q che vi appartengono, basta usare le formule date qui sopra tenendo conto che il versore che identifica la retta è dato da $\mathbf{u} = \frac{R-Q}{|R-Q|}$.

- **Semiretta:** Se si pone $t \geq 0$ nella equazione della retta si ottiene l'equazione della semiretta con origine in Q orientata come $\mathbf{u}$.

- **Segmenti:** abbiamo già visto che il segmento che unisce i due punti R e Q può essere scritto come il luogo dei punti che hanno la seguente forma

$$P = Q + t(R - Q) \quad t \in [0, 1]$$

- **Sfere:** dato il centro della sfera O ed il suo raggio r, i punti della superficie sferica sono dati dall'equazione

$$P = O + r\mathbf{u}$$

  dove $\mathbf{u}$ è un versore generico. Si dimostra facilmente che, in termini delle coordinate, la superficie sferica è data dall'equazione

$$(x - x_O)^2 + (y - y_O)^2 + (z - z_O)^2 = r^2$$

- **Piani:** un piano nello spazio 3D può essere identificato da 3 punti non allineati P, Q ed R. Il luogo dei punti che descrive tale piano è dato dalla combinazione affine

$$S = \alpha P + \beta Q + \gamma R \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \; \alpha + \beta + \gamma = 1.$$

  Alternativamente si può definire un piano a partire da un punto Q che vi appartiene e da un vettore $\mathbf{u}$ che ne identifica la normale come il luogo dei punti P tali che

$$(P - Q) \cdot \mathbf{u} = 0$$

In termini di coordinate abbiamo

$$(x - x_Q)u_x + (y - y_Q)u_y + (z - z_Q)u_z = 0$$

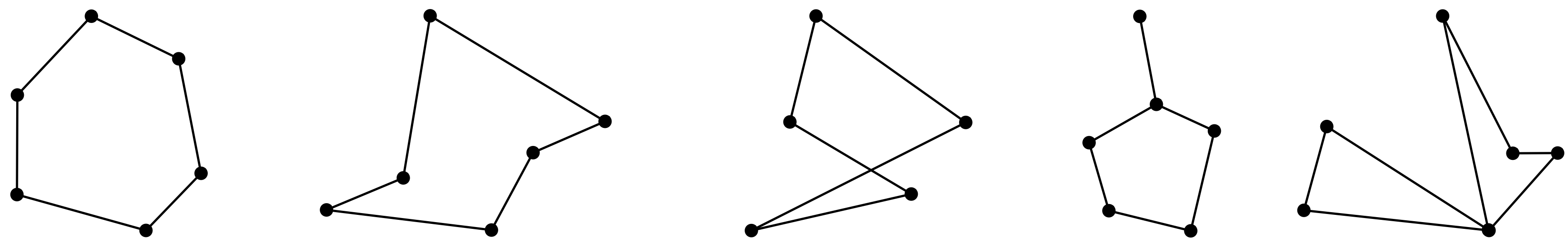
Per passare dalla prima alla seconda rappresentazione basta prendere come punto Q e come vettore $\mathbf{u} = (P - Q) \times (R - Q)$

- **Semispazi:** il piano di cui sopra identifica due semispazi, uno **positivo** ed uno **negativo**:

$$(P - Q) \cdot \mathbf{u} > 0$$
$$(P - Q) \cdot \mathbf{u} < 0$$

Poligoni

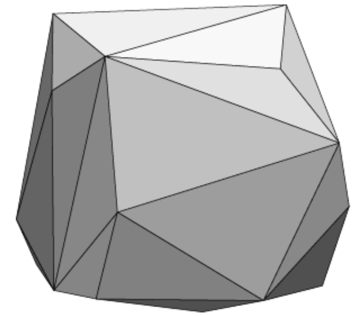
- **Poligoni:** Un poligono $\mathcal{P}$ è un insieme finito di segmenti (spigoli) di $\mathbb{R}^2$, in cui ogni estremo (vertice) è comune a esattamente due segmenti, che si dicono *adiacenti*.



Poligono, convesso — Poligono, non convesso — Poligono, non semplice — Non poligono — Non poligono

- Un poligono è detto **semplice** se ogni coppia di spigoli non adiacenti ha intersezione vuota.
- **Teorema di Jordan**: Un **poligono semplice** $\mathcal{P}$ divide il piano in due regioni o facce, una limitata (detta **interno** di $\mathcal{P}$) ed una illimitata (detta **esterno** di $\mathcal{P}$).
- Per convenzione, un poligono viene rappresentato dalla sequenza dei suoi vertici $P_1 \dots P_n$ ordinati in modo che l'interno del poligono giaccia alla sinistra della retta orientata da P_i a P_{i+1}, ovvero i vertici sono ordinati in senso **antiorario**.

- **Poliedri.** In $\mathbb{R}^3$ un poliedro
  semplice è definito da una insieme finito di poligoni (facce) tali che ciascuno spigolo di una faccia è condiviso da esattamente un'altra faccia e le facce non si intersecano che negli spigoli.

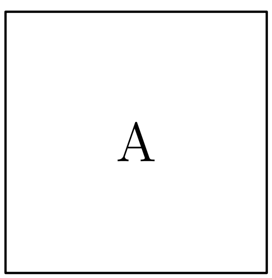


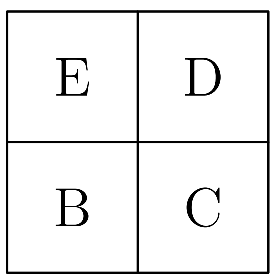
Strutture dati geometriche

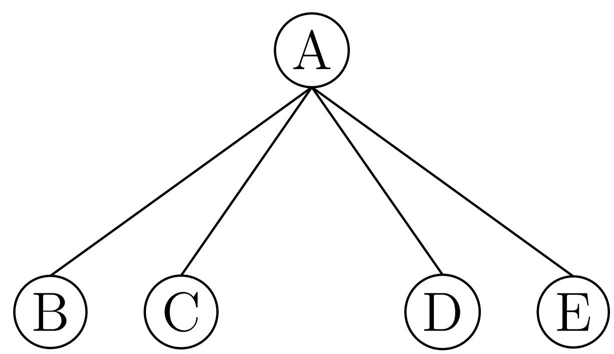
- Illustreremo alcune strutture dati basate sulla suddivisione ricorsiva dello spazio: **Quadtrees**, **Octrees** e **Binary Space Partition (BSP) tree**.
- Servono, in molti contesti, per dare una organizzazione spaziale ad elementi geometrici (punti, segmenti, poligoni, oggetti tridimensionali).

Quadtrees

- Il quadtree è un albero quaternarioche si costruisce nel seguente modo
  - Si considera un quadrato iniziale grande abbastanza da contenere gli oggetti in questione e lo si pone come radice del quadtree.
  - Si suddivide quindi tale quadrato in quattro parti uguali, ottenendo quattro quadrati di lato metà rispetto alla radice (quadranti); ciascuno di essi è un figlio per la radice del quadtree.
  - Si esegue ricorsivamente la suddivisione di ogni nodo fino a quando un quadrante contiene un numero di oggetti (o frammenti di essi) inferiore ad un numero fissato.
- Nelle foglie dell'albero è quindi contenuto il puntatore ad una struttura dati per gli oggetti (o parti di essi) della scena contenuti nel quadrante associato alla foglia.

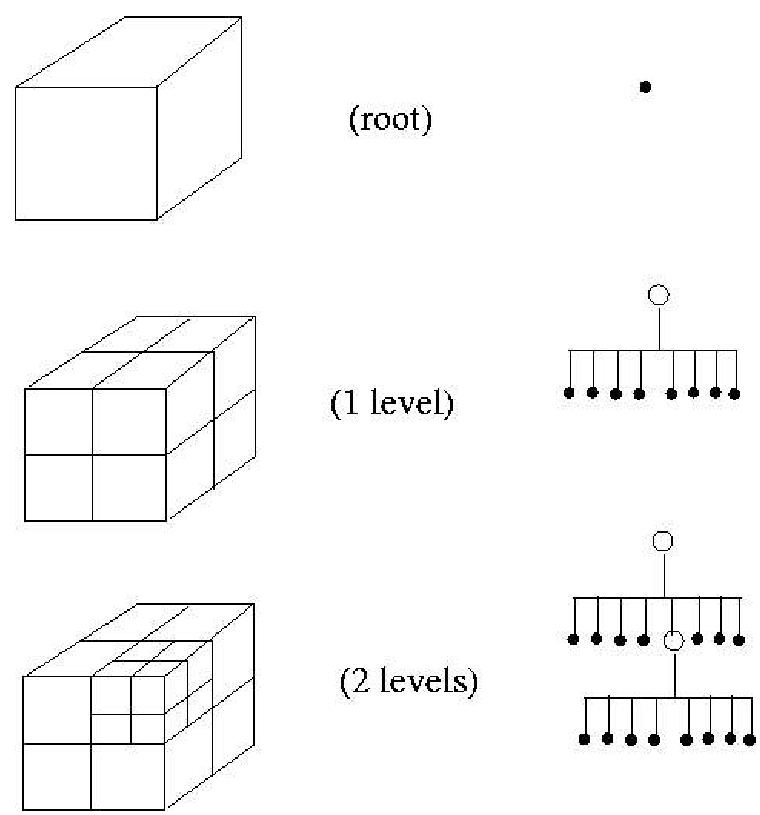






Octrees

- È immediato estendere il quadtree alle tre dimensioni
- Si ottiene il cosiddetto **octree**
- Ogni cubo viene suddiviso in 8 (da qui il nome), per il resto è identico al quadtree

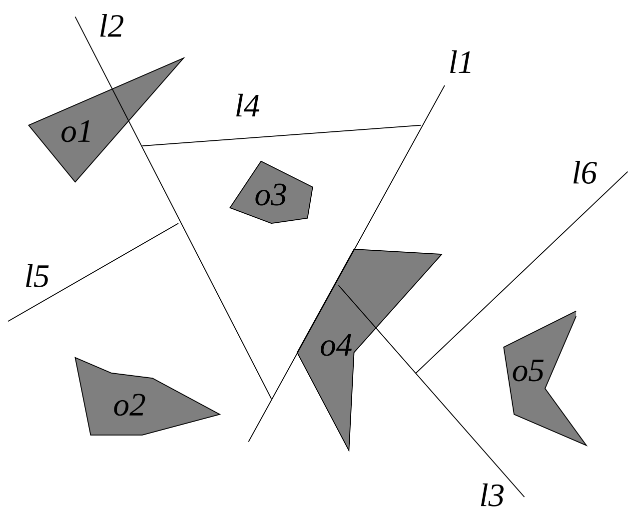


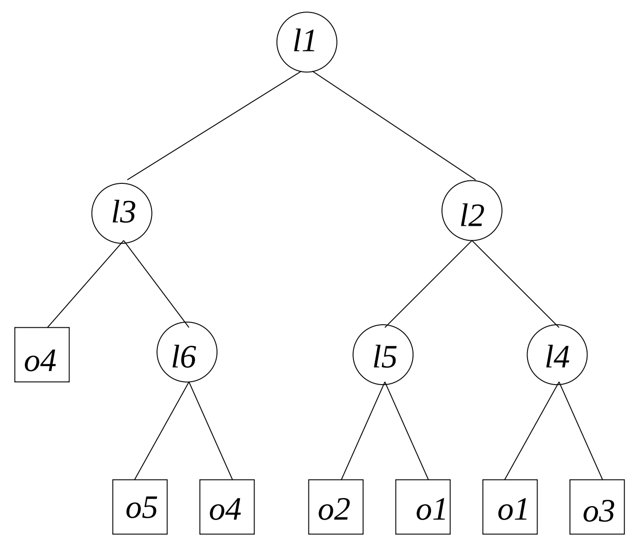
- Nella procedura di suddivisione entrano in gioco due fattori:
  1. **Il numero di oggetti a cui punta una foglia;** più è basso (idealmente uno) e più è alto il beneficio portato dalla struttura ad albero.
  2. **La profondità dell'albero;** più è alta e più ottanti ci sono (più piccoli)
- Bisogna trovare un bilanciamento tra i due fattori; il primo velocizza la ricerca (meno test), ma una profondità troppo alta significa una scarsa efficenza nell'attraversamento dell'albero
- La pratica ha mostrato che gli octree sono efficienti solo quando gli oggetti sono distribuiti uniformemente nella scena
- Se la scena è composta da molti spazi vuoti tra gli oggetti, allora l'octree diventa inefficiente (alta profondità per suddividere essenzialmente lo spazio vuoto)

BSP tree

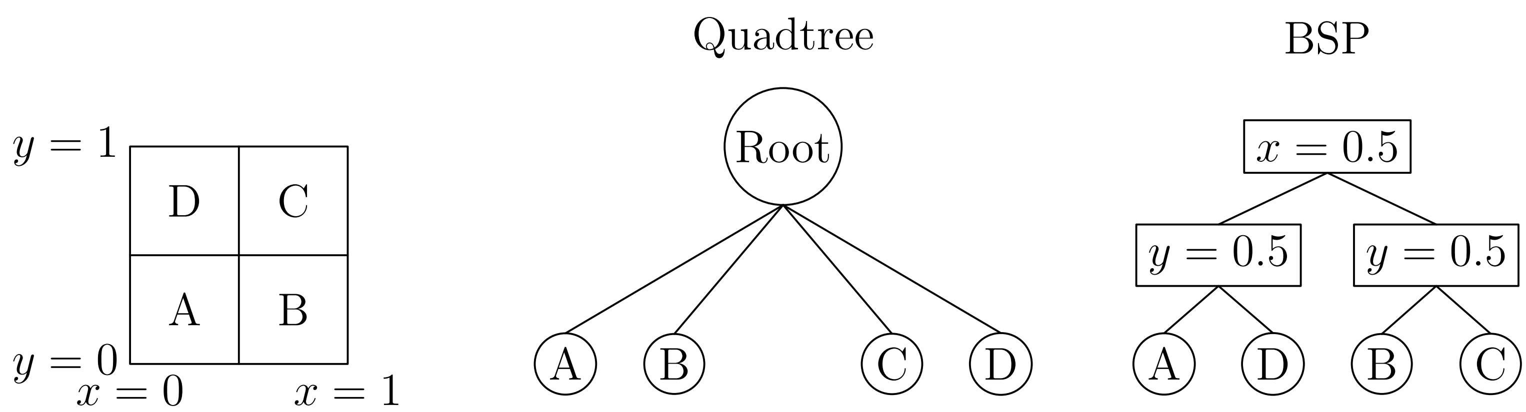
- Il **Binary Space Partition tree** è una struttura dati basata sulla suddivisione ricorsiva dello spazio lungo iperpiani arbitrari.
- Sebbene i BSP possano essere impiegati per organizzare rappresentazioni volumetriche, non offrono in questo caso alcun vantaggio sugli octrees (v. esempio);
- essi sono piuttosto impiegati per rappresentare collezioni di oggetti geometrici (segmenti, poligoni, ...)
- Gli iperpiani oltre a partizionare lo spazio, possono anche dividere gli oggetti
- Le proprietà che vengono sfruttate in grafica sono:
  - un oggetto (o un raggio) che si trova una parte di un piano non interseca gli oggetti che si trovano dall'altra parte
  - dato un punto di vista, ed un piano, gli oggetti che stanno dalla stessa parte del punto di vista sono potenziali occlusori di quelli che stanno dalla parte opposta.

- Il processo di suddivisione ricorsiva continua finché un solo frammento di oggetto è contenuto in ogni regione.
- Questo processo si modella naturalmente con un albero binario, in cui
  - le foglie sono le regioni in cui lo spazio è suddiviso e contengono i frammenti di oggetto.
  - I nodi interni rappresentano gli iperpiani.
  - Le foglie del sottoalbero destro contengono i frammenti di oggetti che stanno alla destra dell'iperpiano.
  - Le foglie del sottoalbero sinistro contengono i frammenti di oggetti che stanno alla sinistra dell'iperpiano.



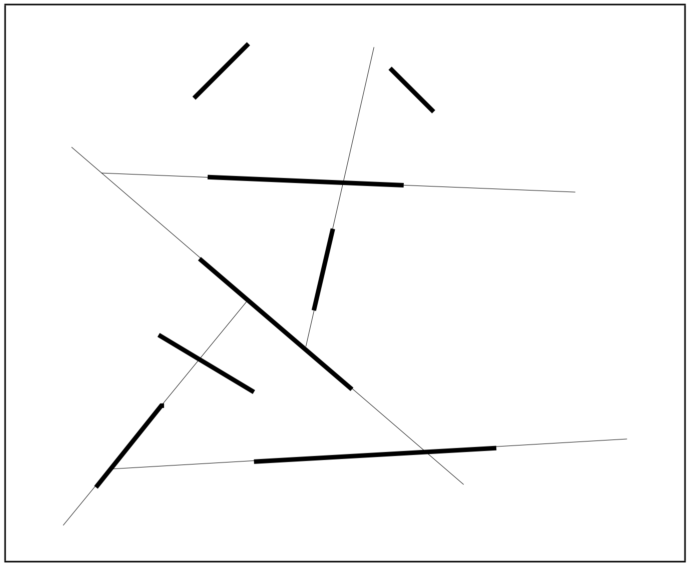


- Vediamo un esempio bidimensionale semplice in modo da compararlo con un quadtree
- Si supponga di avere la suddivisione in figura
- I due alberi, il quadtree ed il BSP, sono semplici da trovare



- Da notare che per il BSP si sono scelte le due rette di suddivisione $x = 0.5$ e $y = 0.5$; in particolare la seconda retta si è usata due volte
- Per suddivisioni di questo tipo (ortogonali), non vi è nessun vantaggio a scegliere il BSP rispetto al Quadtree

- Vediamo ora come costruire un BSP tree.
- Consideriamo il caso di un insieme di segmenti nel piano (che non si intersecano).
- Le linee di suddivisione sono arbitrarie.
- Per ragioni computazionali restringiamo le possibili linee a quelle contenenti i segmenti dati: un BSP che usa solo queste linee si dice **auto-partizionante**.



- Una buona scelta delle linee dovrebbe mantenere minima la frammentazione dei segmenti: poiché la scelta è difficile, si tira a caso.
- Algoritmo casuale:
  - si ordinano i segmenti in modo casuale e si procede pescando un segmento alla volta
  - se il segmento è l'ultimo della lista, si crea una foglia
  - altrimenti si usa la retta contenente il segmento come linea di suddivisione e si creano due liste di segmenti (eventualmente spezzando quelli originali) appartenenti ai due semipiani
  - si crea un nodo nell'albero e si considerano ricorsivamente le due liste di segmenti

- **Complessità**: La dimensione di un BSP tree è pari al numero di frammenti che vengono generati. Se n è il numero di segmenti originali, si può dimostrare che l'algoritmo casuale produce un numero di frammenti pari a $O(n \log n)$ (valore atteso). Il tempo necessario per costruire il BSP tree è $O(n^2 \log n)$.
- L'algoritmo si generalizza facilmente al caso di poligoni nello spazio 3D.